

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИИ ПОНТОНА РАДИАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТАЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

RESEARCH OF MATHEMATICAL MODEL OF RADIAL PANTONE DEFORMATION FOR CYLINDRICAL STEEL TANKS

Резервуары и резервуарные парки являются опасными производственными объектами – ответственными сооружениями, стоимость хранящихся в них продуктов, во много раз превышает стоимость конструкций. Условия их эксплуатации являются весьма тяжелыми, коррозионное воздействие газов, паров нефти (особенно высокосернистой) и нефтепродукта может привести к преждевременному выходу из строя отдельных узлов резервуара и понтона.

Исходя из таких условий эксплуатации, требования к конструкции алюминиевого понтона высокие – прочность, минимальная склонность к хрупкому разрушению, хладноломкости и старению.

В статье с целью исследования напряженно-деформированного состояния и совершенствования процесса конструирования алюминиевого понтона радиального типа для вертикальных стальных резервуаров, рассмотрен случай заклинивания понтона. Для этого разработана математическая модель круглой пластины, защемленной по дуговому краю. Получены линейные дифференциальные уравнения прогиба понтона при заклинивании.

На основании конструктивной особенности понтона радиальной конструкции, рассмотрены сегменты понтона в виде клиновидной пластинки, получены математические модели кругового сектора понтона для случая малых прогибов понтона (при деформации настила) и для случая больших прогибов, при деформации настила и силовых профилей понтона.

В более точной постановке задачи, для случая, когда силовые профили не сохраняют свою прямолинейную форму при поперечной нагрузке, приведены математические модели изгибов стержней и прогиба настила понтона с учетом изгиба силовых профилей.

Приведено решение задачи по определению прогиба предложенного плавающего покрытия. Получены формулы для определения прогиба радиального понтона на основании рассматриваемого кругового сектора.

Tanks and gas tank battery are hazardous production objects and as a consequence responsible constructions. The cost of products stored in them by many times exceeds the cost of constructions. Operating conditions are very hard – corrosion action of gases, oil vapors (especially high sulphur vapors) and oil products may cause the premature breakdown of the tank and pantone separate units.

Proceeding from such operating conditions the requirements to the aluminium pantone construction are high – strength , lowest inclination to the brittle failure, cold shortness and ageing.

In this article , with the purpose of researching strain-stress state and working out the process of improvement of the radical type aluminium pantone for vertical steel tanks there was considered a case of pantone wedging up in the form of a round edge-stiffened plate mathematical model. Linear differential equations of pantone bending during wedging up were got.

On the basis of the special feature of the radial type pantone, the segments of pantone in a form of V-type plane were considered , mathematical models of pantone circular sector for the cases of pantone small bending (at a deck deformation) and for cases of a large bending at deck deformation and pantone power sections have been got.

For more precise formulation of a problem for a case ,when power sections do not preserve theirs linear forms at a transverse load, mathematical model of rod bending and of pantone deck bending , taking into account power profile bending have been brought about.

Solution of a problem for determination of the offered floated coating bending has been brought about . Functions defining the bending of the radial pantone on the basis of the considered circular sector have been got.

Ключевые слова: резервуар, понтон, алюминий, пластина, математическая модель, нагрузка, конструкция.

Key words: tank, pantone, aluminium, plate, mathematical model , load , design.

Использование аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния плавающих покрытий – это одна из задач комплекса по предотвращению отказов и повышению работоспособности резервуаров с понтоном. В зависимости от поставленной задачи при исследовании напряженно-деформированного состояния понтона

следует рассмотреть различные математические модели пластины.

Конструкция понтона из алюминиевых сплавов радиального типа представляет собой круглую пластину с постоянной толщиной, имеющей сегменты в виде круговых секторов, ограниченных силовыми профилями и одинаково воспринимающие нагрузки на понтон [1]. Для исследования напряженно-деформированного состояния предложенной конструкции понтона, целесообразно рассмотреть прогиб одного сегмента плавающего покрытия, представляющий собой пластину клиновидной формы.

Войновским-Кригером решена задача расчета клинообразной пластинки при свободном дуговом

Якшибаев И. Н., Лукьянова И. Э., Юмагулов М. Г.
Уфимский государственный нефтяной технический университет, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» г. Уфа, Российская Федерация

I.N. Jakshibajev , I. E. Luckjanova , M. G. Jumagulov
Ufa State Petroleum Technological University, FSBEI HE «Bashkir State University» Ufa, the Russian Federation

контуре и произвольных постоянных условиях по краям - один край зашлемен ($\theta = 0$), а другой край свободен ($\theta = \alpha$), за исключением точки $\Gamma = \Gamma_0$, где приложена сосредоточенная сила P [2]. Также по этой задаче некоторые поправки были внесены Койтером [3].

Применение преобразования Меллина к пластинке, зашлеменной по двум краям, реализовано в работах И.С. Уфлянда [4].

На основании решения дифференциального уравнения круглой пластинки в частных производных, И.Э. Лукьяновой получено аналитическое решение для определения прогиба пластинки в случае свободного (не опертого) дугового контура и в случае, когда сектор понтона свободно опирается по всем краям (в том числе и по дуге контура) [5].

В процессе эксплуатации резервуаров встречаются случаи разрушения и заклинивания понтонов. Несмотря на значительное количество научных трудов, посвященных исследованию пластин клиновидной формы, для частного случая заклинивания понтона радиального типа целесообразно рассмотреть не освещенный ранее случай математической модели круглой пластины, зашлеменной по дуговому краю.

Рассмотрим круглую пластину радиуса $R > 0$ толщины h . Предполагается, что пластина жестко зашлемена по краям. При отсутствии нагрузок пластина располагается горизонтально, в качестве координатной плоскости (x, y) примем срединную плоскость пластины, т.е. плоскость, расположенную посередине между верхней и нижней поверхностями пластины. При наличии вертикальной нагрузки $q = q(x, y)$ пластина изогнется; через $w = w(x, y)$ обозначим прогиб срединной плоскости пластины в точке (x, y) . Обозначим также через $v = v(x, y)$ - функцию напряжений (функцию Эйри) в срединной поверхности изогнутой пластины.

Согласно теории гибких пластинок дифференциальные уравнения, связывающие функцию Эйри $v(x, u)$ и функцию прогиба $w(x, u)$ для жестко зашлеменной по контуру пластины имеют вид [6]:

$$L_1 = D \cdot \Delta^2 w - h \cdot L(w, v) = q, \\ L_2 = \Delta^2 v + \frac{1}{2} E \cdot L(w, w) = 0, \quad (1)$$

где Δ - оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,

и, соответственно: $\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$,

а нелинейные операторы $L(w, v)$ и $L(w, w)$ определяются равенством:

$$L(w, v) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad (2)$$

где D, h, E - известные положительные постоянные:

D - жесткость на изгиб;

h - толщина пластины;

E - модуль упругости.

Граничные условия, относящиеся к деформации в срединной поверхности, выглядят следующим образом:

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n \partial \tau}|_{\Gamma} = 0; \quad (3)$$

где Γ - край пластины;

n - направление внешней нормали к краю пластины;

τ - тангенциальное (касательное) направление.

Система уравнений (1) нелинейна, и ее общее решение в явном виде неизвестно. Здесь обычно используются приближенные или численные методы.

В случае, когда толщина h пластины существенно меньше ее остальных измерений, а прогиб w мал, то прогиб w пластины описывается линейным дифференциальным уравнением [7]:

$$D \cdot \Delta^2 w = q \quad (4)$$

Следует отметить, что, так как пластина является круговой, для упрощения исследования уравнений (1)-(4) удобно перейти к полярным координатам (r, φ) , где $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, при этом:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\text{или } r^2 = x^2 + y^2, \quad \arctg \varphi = \frac{y}{x}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки $q(x, y) = q_0$. В этом случае при фиксированном радиусе r прогиб пластины не зависит от угла φ . Поэтому, например, уравнение (4) в частных производных принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения:

$$2D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = r q_0. \quad (7)$$

Соответственно, производные в граничных условиях (3) будут вычисляться по r (вместо n) и по φ (вместо τ).

Так как конструкция понтона радиального типа содержит сегменты в виде одинаковых круговых секторов, ограниченных силовыми профилями и одинаково воспринимающие нагрузки на понтон, то для оценки прочностных характеристик понтона достаточно рассмотреть сектор понтона в виде клиновидной пластинки.

Рассмотрим пластину в виде кругового сектора с углом α ($0 < \alpha < \pi/2$) и радиуса R . При отсутствии нагрузок пластина располагается горизонтально; в качестве координатной плоскости (x, y) примем срединную плоскость пластины, т.е. плоскость, расположенную посередине между верхней и нижней поверхностями пластины. Пусть пластина жестко зашлемена по круговому краю Γ_1 и свободно оперта по двум прямолинейным краям Γ_2 . При наличии вертикальной нагрузки $q = q(x, y)$ пластина изогнется; через $w = w(x, y)$ обозначим прогиб срединной плоскости пластины в точке (x, y) . Обозначим также через $v = v(x, y)$ - функцию напряжений (функцию

Эйри) в срединной поверхности изогнутой пластины.

Предположим сначала, что деформация силовых профилей, ограничивающих круговой сектор по прямолинейным краям, существенно меньше прогибов листового настила понтона, так что можно считать, что профили сохраняют свою прямолинейную форму при данной поперечной нагрузке $q(x,y)$. В этом случае дифференциальные уравнения, связывающие функцию Эйри $v(x,u)$ и функцию прогиба $w(x,u)$ пластины, имеют вид (1), а граничные условия, относящиеся к деформации в срединной поверхности, выглядят следующим образом:

$$w|_{r_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{r_1} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}|_{r_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n \partial \tau}|_{r_1} = 0; \quad (8)$$

$$w|_{r_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}|_{r_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}|_{r_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n \partial \tau}|_{r_2} = 0; \quad (9)$$

Для исследования этих уравнений также удобно перейти к полярным координатам (r, φ) .

В более точной постановке следует считать, что профили не сохраняют свою прямолинейную форму при данной поперечной нагрузке $q(x,y)$, а изгибаются. В этом случае каждый силовой профиль можно рассматривать как стержень, жестко защемленный на краях. Следовательно, задача сведется к рассмотрению двух связанных математических моделей, одна из которых описывает прогиб стержня, а другая - прогиб пластины, имеющей форму кругового сектора. С этой целью приведем математические модели изгибов стержней.

Математическая модель изгиба упругого стержня единичной длины приводит к дифференциальному уравнению [8]:

$$u'' = -\rho(s)q(s)u\sqrt{1-(u')^2}, \quad (10)$$

где s - координата, совпадающая с искривленной осью стержня;

$u(s)$ - прогиб стержня;

$\rho(s)$ - характеризует изменение жесткости по длине стержня,

$q(s)$ - поперечная нагрузка.

В зависимости от способа закрепления концов стержня возможны различные краевые условия. В случае жесткого защемления краевые условия имеют вид:

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (11)$$

Если стержень лежит на упругом основании, то математическая модель приводит к краевой задаче:

$$u'' = -\rho(s)q(+f(u))\sqrt{1-(u')^2}, \quad (12)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Здесь $f(u)$ - функция, характеризующая наличие упругого основания типа Винклера.

Рассмотрим теперь пластину в виде кругового сектора с углом α ($0 < \alpha < \pi/2$) и радиуса R . При отсутствии нагрузок пластина располагается горизонтально. Пусть пластина жестко закреплена по

круговому краю Γ_1 и свободно оперта по двум прямолинейным краям Γ_2 (профилям). Каждый профиль можно рассматривать как отрезок длины $2R$ ($-R \leq t \leq R$) и характеризовать как упругий стержень. Наряду с t , будем рассматривать вспомогательную переменную:

$$s = s(t) = \frac{t}{2R} + \frac{1}{2}, \quad (13)$$

тогда $0 \leq s(r) \leq 1$, причем $s(-R) = 0$ и $s(R) = 1$.

При наличии вертикальной нагрузки $q = q(x,y)$ пластина изогнется; пусть при этом изогнется также часть края пластины, а именно, ее прямолинейные участки Γ_2 (профили). Через $w = w(x,y)$ обозначим прогиб срединной плоскости пластины в точке (x, y) . Через $u(s)$ ($0 \leq s \leq 1$) обозначим прогиб одного из двух прямолинейных краев; s - вспомогательная координата (12). Обозначим также через $v = v(x,y)$ - функцию напряжений (функцию Эйри) в срединной поверхности изогнутой пластины.

В рассматриваемом случае дифференциальные уравнения, связывающие функцию Эйри $v(x,u)$ и функцию прогиба $w(x,u)$ пластины имеют вид (1), а граничные условия, относящиеся к деформации в срединной поверхности, выглядят следующим образом:

$$w|_{r_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{r_1} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}|_{r_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n \partial \tau}|_{r_1} = 0; \quad (14)$$

$$w|_{r_2} = u(s), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}|_{r_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}|_{r_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n \partial \tau}|_{r_2} = 0; \quad (15)$$

при этом функция $u(s)$ - это решение задачи (10)-(11).

Для приведения решения задачи о прогибе понтона, рассмотрим понтон радиального типа, содержащего $2m$ сегментов в виде одинаковых круговых секторов; здесь $m \geq 1$.

Как было отмечено выше, для решения указанной задачи достаточно рассмотреть сектор понтона в виде клиновидной пластинки. Поэтому ограничимся рассмотрением задачи о прогибе кругового сектора с углом $\alpha = \pi/m$ и радиуса R . При отсутствии нагрузок пластинка располагается горизонтально. Пусть пластинка жестко закреплена по круговому краю Γ_1 и свободно оперта по двум прямолинейным краям Γ_2 (рисунок 1).

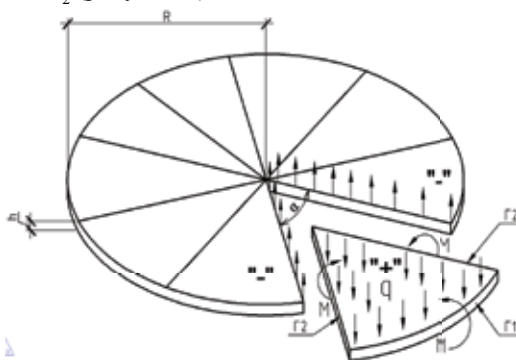


Рисунок 1. Расчетная схема сектора пластины

Прогиб указанной пластинки ничем не будет отличаться от прогиба круглой пластины того же радиуса R , нагруженной и жестко защемленной по круговому краю (рисунок 1). Значком «+» обозначены сегменты, к которым прикладывается равномерная нагрузка q , направленная вертикально вниз, а значком «-» - сегменты, к которым прикладывается равномерная нагрузка q , направленная вертикально вверх (рисунок 1).

Далее рассмотрим задачу прогиба указанной круглой пластины. При наличии вертикальной нагрузки $q = q(x, y)$ пластинка изогнется; через $w = w(x, y)$ обозначим прогиб срединной плоскости пластинки в точке (x, y) . Отметим, что в указанной постановке вертикальная нагрузка q уже не может рассматриваться как равномерная (оставаясь равномерной на каждом сегменте). Однако, очевидно, что ее можно рассматривать как функцию $q = q(\varphi)$, где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При этом $q(\varphi) = q_0$ при $0 < \varphi < \pi/m$, $q(\varphi) = -q_0$ при $\pi/m < \varphi < 2\pi/m$, $q(\varphi) = q_0$ при $2\pi/m < \varphi < 3\pi/m$ и т. д.

Так как толщина h пластинки существенно меньше остальных ее других линейных размеров, а прогибы пластины предполагаются малыми, то для определения прогибов $w = w(x, y)$ можно воспользоваться первым из уравнений системы (1), в котором следует положить $h = 0$, т.е. уравнением (4) с краевыми условиями (8):

$$w|_{r_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{r_1} = 0;$$

где Γ - край пластины.

Перейдем в уравнении (4) к полярным координатам (6). Так как вертикальная нагрузка q не является равномерной, являясь функцией угла $q = q(\varphi)$, то получим более общее уравнение, чем уравнение (7):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \omega = \frac{q(\varphi)}{D}, \quad (16)$$

в уравнении прогиб w является функцией $w = w(r, \varphi)$.

Таким образом, для определения прогибов понтона следует найти такое решение $w(r, \varphi)$ уравнения (16), которое удовлетворяет следующим краевым условиям из (8) и (9):

$$w|_{r_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r_1} = 0; \quad w|_{r_2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi^2}|_{r_2} = 0,$$

т.е. условиям:

$$w(R, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r}|_{r=R} = 0; \quad (17)$$

$$w(r, 0) = w\left(r, \frac{\pi}{m}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}|_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}|_{\varphi=\pi/m} = 0. \quad (18)$$

С этой целью заметим, что функция $q(\varphi)$, являясь кусочно-постоянной, которую можно представить в виде ряда Фурье:

$$q(\varphi) = \frac{4mq_0}{\pi} \sum_{k=m, 3m, 5m, \dots} \frac{\sin k\varphi}{k}, \quad (19)$$

где q_0 - равномерная нагрузка на сегменте.

Найдем сначала частное решение уравнения (16) в виде

$$w(r, \varphi) = r^4 \sum_{k=m, 3m, 5m, \dots} C_k \sin k\varphi, \quad (20)$$

где C_k - коэффициенты, требующие определения.

Подставляя (20) в (16) получим равенства:

$$C_k = \frac{4mq_0}{D\pi k(16-k^2)(4-k^2)}. \quad (21)$$

Найденное решение (21) не удовлетворяет краевым условиям (17), но удовлетворяет краевым условиям (18).

Замечание 1. Формула (21) верна при дополнительном условии, что $k \neq 2$ и $k \neq 4$, т.е. частное решение уравнения (16) необходимо искать в виде (20) только если $m \neq 2$ и $m \neq 4$. Ниже будем предполагать, что это условие выполнено. Случаи $m = 2$ и $m = 4$ требуют отдельного рассмотрения.

Следуя [6], рассмотрим функцию

$$w_0(r, \varphi) = r \sum_{k=m, 3m, 5m, \dots} (A_k r^k + B_k r^{k+2}) \sin k\varphi, \quad (22)$$

являющуюся, при любых значениях коэффициентов A_k и B_k решением однородного уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \omega = 0, \quad (23)$$

и при этом для нее выполнены краевые условия (18).

Положим

$$w = w_0 + w_1 = \sum_{k=m, 3m, 5m, \dots} (A_k r^k + B_k r^{k+2} + r^4 C_k) \sin k\varphi, \quad (24)$$

Эта функция является решением уравнения (16); для нее выполнены краевые условия (18). Подберем коэффициенты A_k и B_k таким образом, чтобы для функции (24) были выполнены и краевые условия (17). Подставив функцию (24) в (17), получим следующие системы для определения A_k и B_k :

$$\left. \begin{aligned} R^k A_k + R^{k+2} B_k &= -R^4 C_k \\ kR^{k-1} A_k + (k+2)R^{k+1} B_k &= -4R^3 C_k \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Отсюда:

$$A_k = \frac{2-k}{2} R^{4-k} C_k, \quad B_k = \frac{k-4}{2} R^{2-k} C_k$$

Таким образом, функция (24), в которой $0 \leq \varphi \leq \pi/m$, а коэффициенты определяются равенствами (21) и (25), является искомым решением, определяющей прогиб рассматриваемого кругового сектора понтона, а, следовательно, и самого понтона.

На основании уравнения (24) получим различные приближенные формулы - частные решения для определения прогиба сегмента понтона, вида:

$$w \approx (A_m r^m + B_m r^{m+2} + r^4 C_m) \sin m\varphi. \quad (26)$$

Например, при $m = 3$ (т.е. когда понтон состоит из 6 сегментов) из (21), (24) и (25) получим:

$$w \approx -\frac{12q_0}{105D\pi} r^3 \left(r - \frac{R}{2} - \frac{r^2}{2R} \right) \sin 3\varphi. \quad (27)$$

Из формулы (27), в частности, можно получить, что максимальное значение прогиба сегмента понтона достигается при значении $r \approx 0,6R$ и $3\varphi = \pi/2$ т.е. на линии центрального угла сегмента, что

не противоречит методам определения прогибов клиновидной пластины.

Выводы

На основании математической модели круглой пластины, защемленной по дуговому краю, получено частное решения для определения прогиба сегмента понтона радиального типа.

Формулы применимы для понтонов с различными геометрическими параметрами и с различными количеством несущих балок в зависимости от диаметра понтона.

Полученные уравнения и их решения могут быть использованы при проектировании и исследовании напряженно-деформированного состояния алюминиевого понтона радиального типа для вертикальных стальных резервуаров.

СПИСОК ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Алюминиевый понтон поплавкового типа / И. Н. Якшибаев, И. Э. Лукьянова, Ф. М. Мустафин: пат. на полезную модель № 146047. № 2014111880; Заявл. 27.03.2014; публ. 27.09.2014, Бюл. № 27.
- 2 Woinowsky-Krieger S., // Ingr.-Arch, 1952. T. 20, C. 391.
- 3 Koiter W.T.// Ingr.-Arch, 1953. T. 21, C. 381.
- 4 Уфлянд Я.С., // Доклады АН СССР, 1952. Т. 84. №3, С. 463.
- 5 Лукьянова И.Э. Теоретические основы совершенствования методов расчета стальных вертикальных резервуаров с понтонами: дис.... д-ра техн. наук: 25.00.19; Уфа: УГНТУ. 2010. 322 с.
- 6 Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Издательство «Наука», 1966. 636 с.
- 7 Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем: Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
- 8 Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. 1952. 428 с.

REFERENCES

- 1 Jakshibaev I. N., Luk'janova I. Je., Mustafin F. M. *Aljuminievyyj ponton poplavkovogo tipa* [Aluminum pontoon float type] Pat. na poleznuju model' No 146047. No 2014111880 No 27. [in Russian].
- 2 Woinowsky-Krieger S., Ingr.-Arch, vol. 20, pp. 391, 1952. [in English].
- 3 Koiter W.T. Ingr.-Arch, vol. 21, pp. 381, 1953. [in English].
- 4 Ufljand Ja.S., Reports of the academy of sciences of the USSR vol. 84, No 3, pp. 463, 1952. [in Russian].
- 5 Luk'janova I. Je. *Teoreticheskie osnovy sovershenstvovanija metodov rascheta stal'nyh vertikal'nyh rezervuarov s pontonami*: dis. d-ra tehn. nauk: [Theoretical bases of perfection of methods of calculation of vertical steel tanks with pontoons Dr. tehn Sci. diss...]. Ufa: UGNTU. 2010. 322 p. [in Russian]
- 6 Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastinki i obolochki*. [Plates and shells]. Moscow, "Nauka" Publ., 1966. 636 p. [in Russian].
- 7 Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustojchivost' uprugih sistem*. [Basis of calculation on stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991. 336 p. [in Russian].
- 8 Jasinskij F.S. *Izbrannye raboty po ustojchivosti szhatyh stержnej*. [Selected works on stability of compressed rods].

Moscow, Publ., techno-theoretical literature, 1952, 428 p. [in Russian].
 Якшибаев И. Н., аспирант кафедры «Сооружение и ремонт газонефтепроводов и газонефтехранилищ», ФГБОУ ВО УГНТУ, г. Уфа, Российская Федерация.
 I. N. Yakshibaev, Post-graduate Student of the Chair «Construction and Repair of Oil and Gas Pipelines and Storages» FSBEI HE USPTU, Ufa, the Russian Federation e-mail: ilnartg@gmail.com
 Лукьянова И.Э., д-р техн. наук, профессор кафедры «Сооружение и ремонт газонефтепроводов и газонефтехранилищ», ФГБОУ ВО УГНТУ, г. Уфа, Российская Федерация.
 I. E. Lukyanova, Doctor of Engineering Sciences, Professor of the Chair «Construction and Repair of Oil and Gas Pipelines and Storages» FSBEI HE USPTU, Ufa, the Russian Federation e-mail: iri-lou@mail.ru
 Юмагулов М. Г., д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО БашГУ, г. Уфа, Российская Федерация
 M. G. Yumagulov, Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Professor, Head of the Chair «Differential Equations» FSBEI HE BSU, Ufa, the Russian Federation. e-mail: yum_mg@mail.ru