

РАСЧЕТ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОСРЕДНЕННОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ

УДК 550.832.6

CALCULATION OF ASYMPTOTICALLY AVERAGED TEMPERATURE PROFILE
OF TURBULENT GAS FLOW IN A VERTICAL WELL

**Филиппов А.И., Ахметова О.В.,
Олефиренко К.В.**
ФГБОУ ВПО «Уфимский
государственный нефтяной
технический
университет», филиал, г. Салават,
Российская Федерация
ФГБОУ ВПО «Башкирский
государственный университет»,
филиал г. Стерлитамак, Российская
Федерация

**A.I. Filippov, O.V. Akhmetova,
K.V. Olefirenko**
FSBEI of HPE Ufa State Petroleum
Technological University, Salavat branch,
the Russian Federation
FSBEI of HPE Bashkir State University,
branch, Sterlitamak, the Russian
Federation

Развита теория теплообмена турбулентного газового потока в скважине с учетом сжимаемости, профиля скорости и зависимости теплопроводности от радиальной координаты. Исследование температурного поля осуществлено на основе задачи сопряжения, включающей уравнение конвективной теплопроводности с тремя переменными коэффициентами. Наличие трех переменных коэффициентов существенно затрудняет построение аналитических решений задачи. В такой постановке задача аналитически решена впервые. Решение задачи получено на основе разработанной авторами модификации асимптотического метода, который использован в сочетании с методом интегрального преобразования Лапласа – Карсона.

Найдено аналитическое выражение для нулевого коэффициента асимптотического разложения, который представляет асимптотически усредненные по сечению скважины значения температуры.

Полученные выражения для температуры удовлетворяют требованиям, предъявляемым к инженерным методам расчетов, и могут быть широко использованы на практике для расчетов температурных полей газового потока в скважине.

На основе анализа задачи для остаточного члена показано, что решение усредненной по сечению скважины задачи для первого коэффициента разложения остаточного члена по асимптотическому параметру обращается в нуль. Отсюда следует, что найденный нулевой коэффициент асимптотического разложения представляет «в среднем точное» решение.

На основе анализа нулевого коэффициента асимптотического разложения показано, что асимптотические средние по сечению значения температуры газового потока не зависят от радиального распределения скорости и теплопроводности. Выполнены расчеты пространственно-временных распределений температуры в скважине. Построены зависимости, позволяющие судить о характере изменения температуры по стволу газовой скважины и ее изменения во времени, что составляет основу интерпретации термограмм.

The theory of heat transfer in the turbulent gas flow taking into account the compressibility of the wellbore, depending on the velocity profile and the thermal conductivity of the radial coordinate. The research carried out at a temperature field based on the coupling problem, including the convective heat equation with three variables coefficients. Having three variable factors makes it difficult to construct analytical solutions of the problem. In such a setting, the problem is solved analytically for the first time. The decision problem is obtained on the basis of the authors' modification of the asymptotic method, which is used in combination with the method of integral Laplace - Carson. An analytical expression for the zero coefficient of the asymptotic expansion, which is averaged over the cross section asymptotically well temperature.

The resulting expression for the temperature of the qualifications required for engineering calculation methods, and can be widely used in practice for the calculation of temperature fields of the gas flow in the well.

Basing on asymptotic expansion zero coefficient analysis it is shown that asymptotic and averaged over a cross section gas flow temperature values are independent of velocity distribution. The dependencies constructed make it possible to judge temperature behavior by the gas well bore and in time variation thus being a basis for temperature-depth profile interpretation.

The temperature expressions obtained comply with the requirements for engineering methods of calculation and can be widely used in practice.

Ключевые слова: поток газа, газовая скважина, температурное поле, асимптотический метод, турбулентный режим течения.

Key words: gas flow, gas well, temperature field, asymptotic method, turbulent flow regime.

Введение

При движении газа по скважине одновременно наблюдаются различные тепловые процессы и эффекты. К ним относится нестационарный теплообмен с окружающими горными породами, конвективный (макроскопический) и кондуктивный (молекулярный) перенос тепла в газе, диссипатив-

ные процессы превращения механической энергии в тепло за счет внутреннего трения, адиабатический эффект при расширении газа от забоя к устью.

Ниже предполагается, что окружающая газовую скважину среда однородная и ортотропная. Режим течения газа по стволу скважины в большинстве случаев турбулентный вследствие малой вязкости газа, поэтому газ обладает ортотропными теплофизическими свойствами.

В отличие от жидкостных, в газовых потоках проявляется свойство сжимаемости транспортируемой среды. Этим свойством объясняется адиабатический эффект, возникающий при течении газа по

скважине. Оценки показывают, что плотность газа следует считать зависящей от вертикальной координаты

$$\rho = \rho(z_d/D) = \rho_0 Z(z_d/D).$$

Важным отличием термодинамических процессов в газовых скважинах, в сравнении с жидкостными, является понижение температуры флюида в призабойной зоне. Это объясняется положительным эффектом Джоуля – Томсона при дросселировании газа от места его залегания до забоя скважины.

В предлагаемой модели (рисунок 1) газ движется вверх по вертикальной скважине радиуса r_0 . Ось z_d цилиндрической системы координат направлена вертикально вверх вдоль оси скважины ($z_d = 0$ на забое). Радиальные координатные линии r_d располагаются в плоскости, перпендикулярной оси трубы. Предполагается, что окружающая среда однородная и ортотропная, температура отдаленных от скважины участков пород изменяется по линейному закону с расстоянием от забоя z_d .

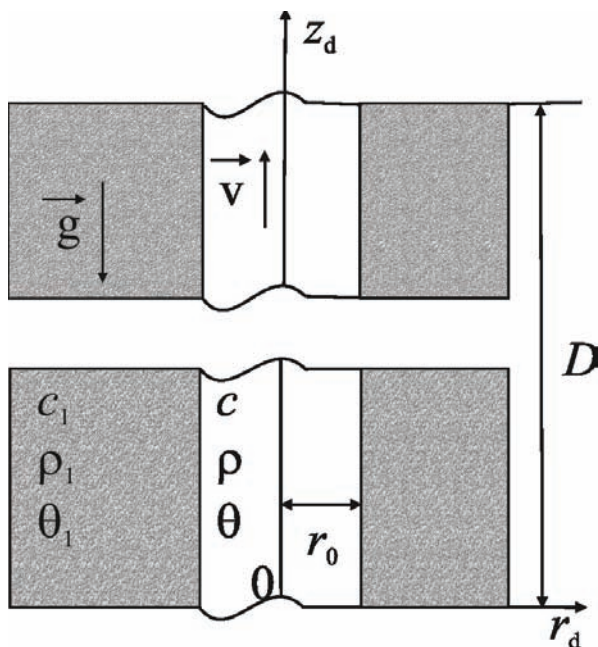


Рисунок 1. Геометрия задачи

Рассматривается область глубин, куда не проникают сезонные колебания температуры на поверхности, тогда процесс теплообмена с окружающими скважину породами главным образом зависит от естественной для данной местности температуры Земли и теплопроводности составляющих массив пластов. На искомое решение накладывается также условие симметрии, заключающееся в том, что производная по радиальной координате на оси z_d в центре скважины обращается в нуль.

2. Математическая постановка задачи о температурном поле газовой скважины включает уравне-

ние теплопроводности в окружающем трубу массиве:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \right), \quad r_d > r_0, \quad \tau > 0, \quad z_d > 0 \quad (2.1)$$

и уравнение конвективной теплопроводности потока газа в скважине:

$$\rho_0 Z \left(\frac{z_d}{D} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + c \rho_0 v_0 R \left(\frac{r_d}{r_0} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z_d} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \lambda \left(\frac{r_d}{r_0} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) + q(z_d) \quad (2.2)$$

$$r_d < r_0, \quad \tau > 0, \quad z_d > 0.$$

Выражение для плотности источников $q(z_d)$ учитывает переход механической энергии в теплоту (за счет трения) и адиабатический эффект в восходящем потоке газа и другие источники тепла.

Условия на границе трубы и окружающего массива определяются равенством температур:

$$\theta|_{r_d=r_0} = \theta_1|_{r_d=r_0} \quad (2.3)$$

и тепловых потоков:

$$\left(\lambda_r \lambda \left(\frac{r_d}{r_0} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0} \quad (2.4)$$

Начальные условия соответствуют естественной невозмущенной температуре Земли, возрастающей с глубиной z_d по линейному закону:

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad \theta_1|_{\tau=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (2.5)$$

которая совпадает с температурой в удаленных от трубы точках окружающего массива:

$$\theta_1|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d \quad (2.6)$$

В точке $z_d = 0$ температура потока изменяется заданным образом и зависит от времени:

$$\theta|_{z_d=0} = \theta_{10}(\tau) \quad (2.7)$$

В задаче (2.1) – (2.7) переменные коэффициенты $R(r_d/r_0)$ и $\lambda(r_d/r_0)$ представляют зависимость скорости и коэффициента теплопроводности от радиальной координаты, а $Z(z_d/D)$ – зависимость плотности от вертикальной координаты. В случае турбулентного течения эти коэффициенты могут быть определены из уравнений Сполдинга [1] и соответствующих уравнений состояния.

Для обеспечения единственности решения задачи необходимо добавить граничные условия по z_d , однако необходимость их записи отпадает в результате пренебрежения вторыми производными по z_d после обезразмеривания.

При введении безразмерных переменных в задаче (2.1) – (2.7) использованы соотношения:

$$r = \frac{r_d}{r_0}, z = \frac{z_d}{D}, Fo = \frac{\tau a_{1r}}{r_0^2}, a_{1r} = \frac{\lambda_{1r}}{\rho_1 c_1}, Pe = \frac{v_0 r_0}{a_{1r}},$$

$$\Lambda = \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r}, \chi = \frac{c_1 \rho_1}{c \rho_0}, v = \frac{r_0}{D}, T_1 = \frac{\theta_1 - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_{11}},$$

$$T = \frac{\theta - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_{11}}, T_0(Fo) = \frac{\theta_{10}(\tau) - \theta_{01}}{\theta_{11}}, \theta_{11} = \Gamma D,$$

$$Q(z, r) = \frac{r_0^2 q(z_d)}{a_{1r} c \rho_0 \theta_{11}} + v Pe R(r).$$

При этом в уравнениях (2.1) и (2.2) слагаемые, содержащие вторую производную температуры по вертикальной координате, приобретают малый мно-

житель – квадрат величины $v = \frac{r_0}{D} \sim 10^{-4}$, где $r_0 \sim 0.1$ м – радиус скважины и $D \sim 10^3$ м – ее длина. Поэтому слагаемые, содержащие коэффициент v^2 в уравнениях, опущены.

С учетом вышесказанного в безразмерном виде задача (2.1) – (2.7) запишется как:

$$\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, r > 1, Fo > 0, z > 0, \quad (2.8)$$

$$Z(z) \frac{\partial T}{\partial Fo} + v Pe R(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q(z, r), \quad (2.9)$$

$$r < 1, Fo > 0, z > 0,$$

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \lambda(r) \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.11)$$

$$T|_{Fo=0} = 0, T_1|_{Fo=0} = 0, \quad (2.12)$$

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.13)$$

$$T|_{z=0} = T_0(Fo). \quad (2.14)$$

В задаче (2.8) – (2.14) заменой Λ на $\varepsilon \Lambda$ формально введен параметр асимптотического разложения ε . Такое введение формального параметра в задаче имеет физический смысл, заключающийся в том, что устремление его к нулю $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует возрастанию радиальной компоненты теплопроводности газа до бесконечности $\lambda_r \rightarrow \infty$ (случай $\varepsilon=1$ соответствует исходной задаче). Задача (2.8) – (2.14) представляет собой задачу сопряжения, содержащую краевые условия 4-го рода и линейное неоднородное дифференциальное уравнение параболического типа с тремя переменными коэффициентами $R(r)$, $\lambda(r)$, $Z(z)$ и стационарным источником $Q(z, r)$. Заметим, что рассматриваемая задача, содержащая указанные переменные коэффициенты и источник тепла, рассматривается впервые и отли-

чается от задач, исследованных другими авторами ранее [2,3,4,5].

Ниже описано применение развитой авторами модификации асимптотического метода к решению задачи о температурном поле турбулентного потока газа в скважине, содержащей уравнения с переменными коэффициентами.

3. Асимптотическое разложение задачи.

Решение задачи (2.8) – (2.14) строится в виде асимптотических рядов по параметру ε

$$T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \varepsilon^2 T_1^{(2)} + \dots, T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots \quad (3.1)$$

Подставим выражение (3.1) в (2.8) – (2.14) и с учетом $\lambda(1) = 1$ разобьем задачу по степеням параметра ε :

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \dots = 0 \quad (3.2)$$

$$\varepsilon^0 \left[-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) \right] + \varepsilon^1 \left[Z(z) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) + v Pe R(r) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - \frac{Q(z, r)}{Z(z)} \right] + \dots = 0, \quad (3.3)$$

$$+ \varepsilon^2 \left[Z(z) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) + v Pe R(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right] + \dots = 0,$$

$$T^{(0)} \Big|_{r=1} - T_1^{(0)} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(T^{(1)} \Big|_{r=1} - T_1^{(1)} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \dots = 0, \quad (3.5)$$

$$T^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \varepsilon T^{(1)} \Big|_{Fo=0} + \dots = 0, \quad (3.6)$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \varepsilon T_1^{(1)} \Big|_{Fo=0} + \dots = 0,$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \varepsilon T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \dots = 0, \quad (3.7)$$

$$T^{(0)} \Big|_{z=0} + \varepsilon T^{(1)} \Big|_{z=0} + \dots = T_0(Fo). \quad (3.8)$$

Далее рассматривается решение задачи для нулевого коэффициента разложения температуры.

Процедуру отыскания коэффициентов асимптотического разложения можно повторять до получения требуемого количества слагаемых, однако чаще всего можно ограничиться нулевым и первым слагаемым в асимптотическом разложении (коэффициенты разложения более высоких порядков имеют громоздкий вид и, как правило, практически не влияют на аналитические зависимости). При этом точное решение можно представить в виде:

$$T_1 = T_1^{(0)} + \Theta_1, T = T^{(0)} + \Theta. \quad (3.9)$$

Величина остаточного члена Θ позволяет дать оценку точности первого приближения. Для Θ формулируется краевая задача и отыскивается точное

или приближенное решение. Исследование поведения найденного решения для остаточного члена позволяет отыскать область лучшей применимости первого приближения.

Далее показано, что коэффициент $T^{(0)}$ может быть найден таким образом, что асимптотически осредненное значение остаточного члена обращается в нуль $\langle \Theta \rangle_a = \Theta^{(0)} = 0$ при любых значениях параметра ε . Такое асимптотическое приближение соответствует «в среднем точному».

4. Нулевое приближение. Так как уравнение (3.3) должно выполняться при любых ε (в том числе при $\varepsilon=0$), то каждый коэффициент при степенях параметра разложения должен обращаться в нуль. Отсюда, выписав коэффициенты при ε^0 в уравнении (3.3), имеем:

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Интегрируя (4.1), получаем следующее выражение для радиального градиента температуры в нулевом приближении:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = \frac{C}{\lambda(r)r}.$$

Удовлетворяя следующему из (3.5) условию $\left. \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} = 0$ (или требованию симметрии), делаем вывод о том, что $C = 0$, и получаем $\partial T^{(0)} / \partial r = 0$. Значит, в нулевом приближении температура не зависит от радиальной координаты r и является функцией только координаты z и времени Fo : $T^{(0)} = T^{(0)}(z, Fo)$.

Собирая коэффициенты при ε в нулевой степени, из (3.2) получаем уравнение для нулевого коэффициента разложения в окружающей среде $T_1^{(0)}$

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.2)$$

Аналогично из (3.3) имеем следующее уравнение для определения нулевого коэффициента разложения температуры в трубе:

$$Z(z) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + vPeR(r) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - Q(z, r) = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) является «зацепленным», поскольку включает коэффициенты разложения нулевого и первого порядков $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$, что затрудняет решение соответствующих задач. Учитывая, что $T^{(0)}$ зависит только от безразмерных времени и вертикальной координаты, введем обозначения для независимых от r комбинаций:

$$A(z, Fo) = \frac{\Lambda Z(z)}{\chi} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo}, \quad B(z, Fo) = \frac{vPe\Lambda}{\chi} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}. \quad (4.4)$$

Проинтегрировав (4.3) с учетом (4.4) и осевой симметрии, получим:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = \frac{r}{2\lambda(r)} A(z, Fo) + \frac{B(z, Fo)}{r\lambda(r)} R_1(r) - \frac{\Lambda}{\chi r\lambda(r)} Q_1(r, z). \quad (4.5)$$

где введены обозначения $R_1(r) = \int_0^r r' R(r') dr'$, $Q_1(r, z) = \int_0^r r' Q(r', z) dr'$.

С учетом (4.5) и граничного условия (3.5) получаем:

$$\left. \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{\Lambda Z(z)}{2\chi} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + \frac{vPe\Lambda R_1(1)}{\chi} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - \frac{\Lambda}{\chi} Q_1(1, z) = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} \quad (4.6)$$

Из правой части выражения (4.6) следует уравнение, содержащее коэффициенты разложения только нулевого порядка:

$$Z(z) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + 2vPeR_1(1) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} + 2Q_1(1, z), \quad (4.7)$$

$r < 1, Fo > 0, z > 0.$

Полученное выражение представляет искомое расцепленное уравнение для нулевого коэффициента разложения температурного поля в скважине. Оно отличается от исходного температурного уравнения типом, поскольку является дифференциальным уравнением первого порядка (и относится к гиперболическим). Отметим, что выделенное слагаемое – след производной в правой части – описывает вклад теплообмена потока газа с окружающей средой.

Итак, реализованная выше последовательность преобразований позволила «расцепить» исходное уравнение (4.3), содержащее коэффициенты нулевого и первого порядков $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$.

Окончательная математическая постановка задачи в нулевом приближении включает расцепленное выражение (4.7), уравнение для окружающей скважину среды (4.2), а также равенство температур на границе, начальные и граничные условия:

$$T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (4.8)$$

$$T^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (4.9)$$

$$T^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad T^{(0)} \Big|_{z=0} = T_0(Fo). \quad (4.10)$$

Таким образом, исходная задача для уравнений параболического типа с тремя переменными коэффициентами и источником тепла индуцирована в неклассическую смешанную краевую задачу для коэффициента нулевого асимптотического разложения со следами производных из внешних областей.

Сравнение исходного уравнения (2.9) и полученного (4.7) показывает, что в нулевом приближении радиальная производная второго порядка трансфор-

мируется в след производной из внешней области $\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1}$. Именно это обстоятельство обеспечивает получение практически важных асимптотических решений исходной задачи с переменными коэффициентами.

С помощью преобразования Лапласа – Карсона

$T_j^n = p \int_0^\infty e^{-pFo} T_j(Fo) dFo$, запишем задачу (4.2), (4.7) – (4.10) в пространстве изображений:

$$pT_1^{(0)n} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(0)n}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad z > 0, \quad (4.11)$$

$$Z(z)pT^{(0)n} + 2\nu PeR_1(1) \frac{\partial T^{(0)n}}{\partial z} = 2\chi \left. \frac{\partial T_1^{(0)n}}{\partial r} \right|_{r=1} + 2Q_1(1, z), \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (4.12)$$

$$T^{(0)n} = T_1^{(0)n} \Big|_{r=1}, \quad (4.13)$$

$$T_1^{(0)n} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.14)$$

$$T^{(0)n} \Big|_{z=0} = T_0^n(p). \quad (4.15)$$

Решение уравнения (4.11) с учетом условий (4.13), (4.14) представляется через функцию Макдональда нулевого порядка мнимого аргумента [6].

$$T_1^{(0)n} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)n}, \quad r > 1. \quad (4.16)$$

Отсюда производная для окружающего массива $r > 1$ и ее след на границе, с учетом свойства дифференцирования $K_0'(x) = -xK_1(x)$, представятся в виде:

$$\left. \frac{\partial T_1^{(0)n}}{\partial r} \right|_{r=1} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)n}, \quad (4.17)$$

$$\left. \frac{\partial T_1^{(0)n}}{\partial r} \right|_{r=1} = -\sqrt{p} k T^{(0)n},$$

где через $k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$ обозначено отношение функций Бесселя первого и нулевого порядков. Тогда с учетом (4.17) уравнение (4.12) для определения $T^{(0)n}$ можно представить как:

$$\left(pZ(z) + 2\chi k \sqrt{p} \right) T^{(0)n} + 2\nu PeR_1(1) \frac{\partial T^{(0)n}}{\partial z} = 2Q_1(1, z), \quad r < 1, \quad z > 0. \quad (4.18)$$

Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка (4.18) отыскивается обычными методами [7] и записывается с учетом условия (4.15) в форме:

$$T^{(0)n} = \int_0^z F(\xi) \exp \left(- \int_\xi^z \alpha(\xi') d\xi' \right) d\xi + T_0(p) \exp \left(- \int_0^z \alpha(\xi) d\xi \right), \quad r < 1, \quad z > 0, \quad (4.19)$$

$$\text{где } \alpha(z) = \frac{pZ(z) + 2\chi k \sqrt{p}}{2\nu PeR_1(1)}, \quad F(z) = \frac{Q_1(1, z)}{\nu PeR_1(1)}.$$

Подставив (4.19) в (4.16), получим решение для внешней области:

$$T_1^{(0)n} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} \left[\int_0^z F(\xi) \exp \left(- \int_\xi^z \alpha(\xi') d\xi' \right) d\xi + T_0(p) \exp \left(- \int_0^z \alpha(\xi) d\xi \right) \right], \quad r > 1, \quad z > 0. \quad (4.20)$$

Выражения (4.19) и (4.20) представляют точное решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений.

Покажем, что нулевой коэффициент $T^{(0)}$ является «в среднем точным» решением. Для этого точное решение в виде (3.9) подставим в (2.8) – (2.14), тогда рассматриваемая задача запишется в виде:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.21)$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \left[Z(z) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + Z(z) \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + \nu PeR(r) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} + \nu PeR(r) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{Q(z, r)}{Z(z)} \right] = 0, \quad (4.22)$$

$$T^{(0)} \Big|_{r=1} - T_1^{(0)} \Big|_{r=1} + \Theta \Big|_{r=1} - \Theta_1 \Big|_{r=1} = 0, \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} - \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} + \left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=1} - \varepsilon \Lambda \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad (4.24)$$

$$T^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \Theta \Big|_{Fo=0} = 0, \quad T_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} + \Theta_1 \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (4.25)$$

$$T_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} + \Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.26)$$

$$T^{(0)} \Big|_{z=0} + \Theta \Big|_{z=0} = T_0(Fo). \quad (4.27)$$

Учитывая (4.1), (4.2), (4.8) – (4.10) получим следующую задачу для остаточного члена:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.28)$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r)r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \left[Z(z) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + Z(z) \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + \nu PeR(r) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} + \nu PeR(r) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{Q(z, r)}{Z(z)} \right] = 0, \quad (4.29)$$

$$\Theta \Big|_{r=1} = \Theta_1 \Big|_{r=1}, \quad (4.30)$$

$$\varepsilon \Lambda \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} - \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right|_{r=1} \right) = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (4.31)$$

$$\Theta \Big|_{Fo=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (4.32)$$

$$\Theta_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.33)$$

$$\Theta \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.34)$$

Интегральное осреднение на этом этапе уравнения (4.29) не приводит к желаемым результатам из-за наличия переменного коэффициента $R(r)$, поэтому воспользуемся процедурой асимптотического осреднения, которая представляет собой нахождение нулевого коэффициента разложения [2] остаточного члена по степеням того же формального параметра:

$$\Theta_1 = \Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \dots, \quad \Theta = \Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \dots \quad (4.35)$$

Подставив (4.35) в (4.28) – (4.34) получим:

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) + \varepsilon \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial Fo} - \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \right) + \dots = 0, \quad (4.36)$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{\varepsilon \chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \right) + \left[Z(z) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + Z(z) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial Fo} + \varepsilon Z(z) \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial Fo} + vPeR(r) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \right] \quad (4.37)$$

$$+ vPeR(r) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} + \varepsilon vPeR(r) \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} - \frac{Q(z, r)}{Z(z)} \Big] + \dots = 0,$$

$$\left(\Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \dots \right) \Big|_{r=1} = \left(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \dots \right) \Big|_{r=1}, \quad (4.38)$$

$$\varepsilon \Lambda \left(\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \frac{\partial \Theta_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \dots \right) = \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \varepsilon \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \dots, \quad (4.39)$$

$$\left(\Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \dots \right) \Big|_{Fo=0} = 0, \quad \left(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \dots \right) \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (4.40)$$

$$\left(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon \Theta_1^{(1)} + \dots \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (4.41)$$

$$\left(\Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + \dots \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.42)$$

По аналогии с коэффициентом $T^{(0)}$ для нулевого коэффициента разложения $\Theta^{(0)}$ имеем задачу:

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.43)$$

$$-\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial r} \right) + \left[Z(z) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + Z(z) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial Fo} + \right. \quad (4.44)$$

$$\left. + vPeR(r) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} + vPeR(r) \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial z} - \frac{Q(z, r)}{Z(z)} \right] = 0,$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{r=1} = \Theta_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (4.45)$$

$$\Lambda \left(\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) = \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (4.46)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (4.47)$$

$$\Theta_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.48)$$

$$\Theta^{(0)} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.49)$$

Поскольку $\Theta^{(0)}$ не зависит от радиальной координаты, то применение к задаче (4.43) – (4.49) проце-

дуры интегрального осреднения в интервале по r от 0 до 1 приводит к следующей осредненной задаче:

$$\frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.50)$$

$$-2\chi \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + Z(z) \frac{\partial \langle T^{(0)} \rangle}{\partial Fo} +$$

$$+ 2vPeR_1(1) \frac{\partial \langle T^{(0)} \rangle}{\partial z} - \frac{Q(z, r)}{Z(z)} = -2\chi \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \quad (4.51)$$

$$+ Z(z) \frac{\partial \langle \Theta^{(0)} \rangle}{\partial Fo} + 2vPeR_1(1) \frac{\partial \langle \Theta^{(0)} \rangle}{\partial z}, \quad \langle \Theta^{(0)} \rangle \Big|_{r=1} = \Theta_1^{(0)} \Big|_{r=1}, \quad (4.52)$$

$$\langle \Theta^{(0)} \rangle \Big|_{Fo=0} = 0, \quad \Theta_1^{(0)} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (4.53)$$

$$\Theta_1^{(0)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.54)$$

$$\langle \Theta^{(0)} \rangle \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.55)$$

Левая часть выражения (4.51) равна нулю согласно (4.7), поэтому задача (4.50) – (4.55) имеет тривиальное решение. Последнее означает, что найденное решение исходной задачи в нулевом приближении является «в среднем точным».

В предположении малых времен в пространстве оригиналов (4.19) представится как:

$$T^{(0)} = \int_0^z (1 - F(\xi)) \operatorname{erfc} \frac{\chi(z - \xi)}{\sqrt{2vPeR_1(1)Fo - \int_{\xi}^z Z(\xi') d\xi'}} \Phi \left(Fo - \int_{\xi}^z \frac{Z(\xi')}{2vPeR_1(1)} d\xi' \right) d\xi + T_0 \operatorname{erfc} \frac{\chi z}{\sqrt{2vPeR_1(1)Fo - \int_0^z Z(\xi') d\xi'}} \Phi \left(Fo - \int_0^z \frac{Z(\xi')}{2vPeR_1(1)} d\xi' \right), \quad r < 1, z > 0, \quad (4.56)$$

Формула (4.56) позволяет строить пространственно-временные зависимости асимптотически осредненной по радиусу температуры турбулентного потока газа.

Для расчета кривых использованы следующие значения параметров скважины: $D = 1000$ м, $r_0 = 0,031$ м; наполняющего флюида: метан $c = 2866$ Дж/(К×кг), $\rho = 71,4$ кг/м³; окружающей среды: $\Gamma = 0,02$ К/м, глина – $\lambda = 0,67$ Вт/(м×К), $c = 950$ Дж/(К×кг), $\rho = 2000$ Дж/(К×кг). Безразмерный температурный сигнал пласта $T_0 = -1$.

Рисунок 2 иллюстрирует зависимость температуры метана при дебите $Q_m = 100$ т/сут от безразмерной вертикальной координаты при разных значениях безразмерного времени.

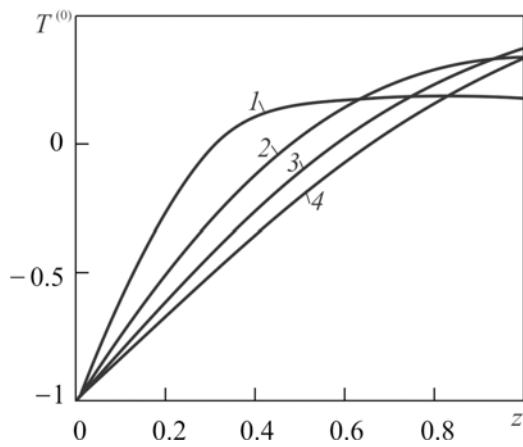


Рисунок 2. Зависимость температуры от вертикальной координаты для различных значений безразмерного времени: 1 - $Fo = 0,22$, 2 - $0,44$, 3 - $0,66$, 4 - $0,88$

На рисунке 3 представлена зависимость температуры газа от безразмерного времени при разных значениях безразмерной вертикальной координаты.

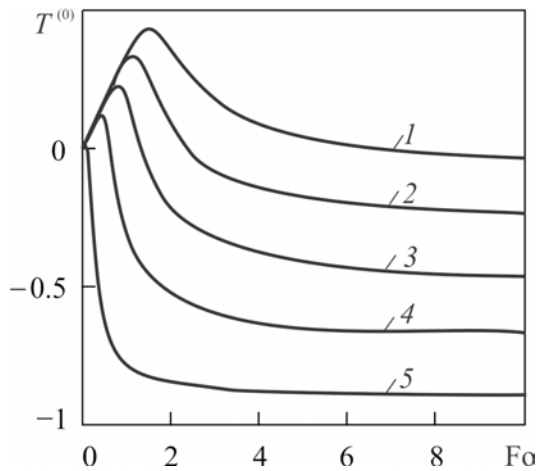


Рисунок 3. Зависимость температуры газа от безразмерного времени при разных значениях безразмерной вертикальной координаты: 1 - $z = 0,9$, 2 - $0,7$, 3 - $0,5$, 4 - $0,3$, 5 - $0,2$

Анализ полученных результатов показывает, что полученные выражения для температуры удовлетворяют большинству требований, предъявляемых к инженерным методам расчетов, и могут быть широко использованы на практике.

Выводы

Итак, применение метода асимптотического разложения по формальному параметру позволило построить приближенное аналитическое решение задачи сопряжения в температурном поле газовой скважины, содержащей уравнение с тремя переменными коэффициентами.

Обозначения

Латинские:

α_{1r} – коэффициент температуропроводности окружающей среды в радиальном направлении, m^2/s ;
 $A(z, Fo)$, $B(z, Fo)$ – вспомогательные функции;
 c , c_1 – удельная изобарная теплоемкость газа и удельная теплоемкость окружающей среды соответственно, $Dж/(K \cdot кг)$;

C – константа интегрирования;

D – глубина скважины (исследуемый интервал скважины), m ;

F_0 – безразмерное время;

g – вектор ускорения свободного падения, m/s^2 ;

$K_0(x)$, $K_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка мнимого аргумента соответственно;

$k = k(p) = K_1(\sqrt{p})/K_0(\sqrt{p})$ – отношение функций Бесселя K_1 и K_0 ;

p – комплексный параметр преобразования Лапласа-Карсона;

Pe – аналог параметра Пекле;

q – плотность источников тепла, $Вт/m^3$;

Q_M – массовый дебит скважины, $т/сут$;

$Q(z)$ – безразмерная функция источников;

r_d , r – соответственно размерная и безразмерная радиальная координата цилиндрической системы координат, m ;

r_0 – внутренний радиус трубы, m ;

R – универсальная газовая постоянная, равная $8,31$ $Дж/(моль \cdot K)$;

τ – размерное время, $с$;

T , T_1 – безразмерное температурное поле газа и окружающей среды соответственно;

T_0 – безразмерный температурный сигнал пласта;

v_0 – средняя по сечению скважины скорость газа, m/s ;

z_d , z – соответственно размерная и безразмерная вертикальная координата цилиндрической системы координат, m ;

$Z(z_d)$ – относительная плотность газа.

Греческие:

α – вспомогательная функция;

Γ – геотермический градиент, K/m ;

ε – параметр асимптотического разложения;

θ , θ_1 – температурное поле газа и окружающей среды соответственно, K ;

θ_0 – температурный сигнал пласта, K ;

θ_{01} – естественная невозмущенная температура Земли в точке $z_d = 0$ (температура газа на забое перед пуском), K ;

$\theta_{10}(t)$ – заданная зависимость температуры газа от времени в точке $z_d = 0$, K ;

θ_{11} – константа, используемая для обезразмеривания, K ;

Θ – остаточный член;

Λ – отношение теплопроводностей в радиальном направлении окружающей среды и газа;

λ, λ_1 – коэффициент теплопроводности газа и окружающей среды соответственно, Вт/(м·К);

λ_r, λ_z – коэффициент теплопроводности газа в радиальном и вертикальном направлении соответственно, Вт/(м·К);

$\lambda_{1r}, \lambda_{1z}$ – коэффициент теплопроводности окружающей среды в радиальном и вертикальном направлении соответственно, Вт/(м·К);

v – отношение радиуса трубы к глубине скважины;

ξ – переменная интегрирования;

ρ, ρ_0 – плотность газа и ее фиксированное значение соответственно, кг/м³;

ρ_1 – плотность окружающей среды, кг/м³;

χ – отношение объемных теплоемкостей окружающей среды и газа в фиксированном сечении.

Нижние индексы:

1 – относящийся к окружающей среде (применительно к теплоемкости, температуре, теплопроводности и плотности);

d – размерный;

r – радиальное направление;

z – вертикальное направление.

Верхние индексы:

i – номер коэффициента разложения;

и – изображение Лапласа – Карсона.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Родионов А.С. Температурное поле турбулентного потока в скважине // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 2. С. 277–286.

2. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Родионов А.С. Асимптотическое осреднение температуры турбулентного потока в скважине // Вестник Тюмен. гос. ун-та. 2012. № 4. С. 6–13.

3. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Крупинов А.Г. Дозвуковое течение реального сжимаемого газа в вертикальной трубе // Изв. Вузов. Физика. 2011. Т. 54, № 12. С. 112–115.

4. Расчеты температурного поля в газовой скважине/ Филиппов А.И. и др. // Нефтегазовое дело: электрон. науч. журн. 2011. № 6. С. 350 – 365.

5. Крупинов А.Г. Исследование нестационарных температурных полей в вертикальной газовой скважине: дис... канд. ф.-м. наук: 01.04.14 Уфа, 2012. 122с.

6. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций М.: Наука, 1971. 288с.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учеб. пособие для втузов. М.: Наука, 1985. Т. 2. 560с.

REFERENCES

1. Filippov A.I., Akhmetova O.V., Rodionov A.S. Temperaturное pole turbulentnogo potoka v skvazhine // Teplofizika vysokih temperature. 2013. T. 51. № 2. S.277–286. [in russian].

2. Filippov A.I., Akhmetova O.V., Rodionov A.S. Asimptoticheskoe osrednenie temperatury turbulentnogo potoka v skvazhine // Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. 2012. № 4. S. 6-13. [in russian].

3. Filippov A.I., Akhmetova O.V., Krupinov A.G. Dozvukovoe tetchenie realnogo szhimaemogo gaza v vertikalnoi trube // Izvestiya vysshih utchebnyh zavedenii. Fizika. 2011. T. 54. № 12. S. 112-115. [in russian].

4. Rastchety temperaturnogo polya v gazovoi skvazhine / Filippov A.I. i dr., // Neftegazovoe delo. Elektron. Nautch. Zhurn 2011. № 6. S. 350-365. [in russian].

5. Krupinov A.G. Issledovanie nestatsionarnyh temperaturnyh polei v vertikalnoi gazovoi skvazhine: dis. k. f.-m. n.: 01.04.14. Ufa, 2012. 122s. [in russian].

6. Korenev B.G. Vvedenie v teoriyu besselevyuh funktsii M.: Nauka, 1971. 288s. [in russian].

7. Piskunov N.S. Differentsialnoe i integralnoe istchisleniya dlya vtuzov: utchebnoe posobie dlya vtuzov. M.: Nauka, 1985. T. 2. 560s. [in russian].

Филиппов А.И., д-р техн. наук, проф. кафедры «Общественные дисциплины», ФГБОУ ВПО УГНТУ, филиал, г. Салават, Российская Федерация
A.I. Filippov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Chair “General Scientific Disciplines”, FSBEI of HPE Ufa State Petroleum Technological University, Salavat branch, the Russian Federation
e-mail: filippovai@rambler.ru

Ахметова О.В., канд. ф.-м. наук, доцент кафедры «Общественные дисциплины», ФГБОУ ВПО УГНТУ, филиал, г. Салават, Российская Федерация
O.V. Akhmetova, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Chair “General Scientific Disciplines”, FSBEI of HPE Ufa State Petroleum Technological University, Salavat branch, the Russian Federation
e-mail: ahoksana@yandex.ru

Олефиренко К.В., аспирант кафедры «Теоретической физики и методики обучения физике», ФГБОУ ВПО БашГУ, г. Стерлитамак, Российская Федерация
K.V. Olefirenko, Post-Graduate Student of the Chair “Theoretical Physics and Physics Teaching Techniques” FSBEI of HPE Bashkir State University, Sterlitamak, the Russian Federation
e-mail: k.v.olefirenko@gmail.com